



A.I.P.M.
Accademia Italiana per la Promozione della Matematica
«Alfredo Guido»

Sede: Via dei Fasci siciliani, 13 - 90036 Misilmeri (PA)
 web: www.accademiamatematica.it

QUALIFICAZIONE DI ISTITUTO
08-11-2023

Scuola Primaria

TABELLA PER LA REGISTRAZIONE DELLE RISPOSTE																			
Quesiti per P3, P4 e P5										Solo per P4 e P5					Solo per P5				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	E	C	C	E	C	E	130	B	A oppure C oppure E	B	A	C	D	12	B	B	E	D	E
		13	14	4	10	81		5	2 oppure 6 oppure 10	4	c,d	44	52		2		135		9

Scuola Secondaria di I Grado

TABELLA PER LA REGISTRAZIONE DELLE RISPOSTE																			
Quesiti per S1, S2 ed S3										Solo per S2 ed S3					Solo per S3				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	3	E	8	C	65	D	4241	E	A	B	1,41	C	B	20	D	B	A	D	D
2,5		72		91		16		5	4	12		3600	21		10	4081	4		8

Scuola Secondaria di II Grado (S4 -S5)

TABELLA PER LA REGISTRAZIONE DELLE RISPOSTE														
Quesiti per la 1° e la 2° classe (S4 e S5)										Quesiti solo per la 2° classe (S5)				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	C	B	D	E	D	A	11	45	135	D	E	C	16	18

Scuola Secondaria di II Grado (S6)

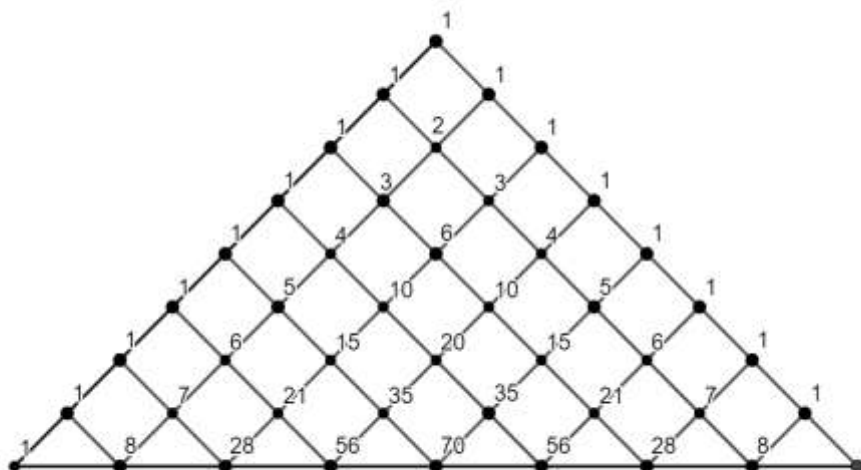
TABELLA PER LA REGISTRAZIONE DELLE RISPOSTE														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	B	D	E	D	C	C	B	E	11	135	16	18	11	630

Sotto trovate la risoluzione di alcune quesiti di scuola secondaria di II grado con alcune tecniche risolutive che potete condividere e approfondire in classe con i vostri allievi.

Soluzione con spiegazione di alcuni quesiti della Qualificazione d'Istituto del 8 novembre 2023 categorie S4, S5, S6.

- **Quesito N°1 categorie S4 e S5 e N°2 categoria S6**

Premessa sul triangolo di Pascal



Quello che vedi è parte del triangolo di Pascal. A ogni nodo, tranne quelli esterni che corrispondono tutti a 1, corrisponde un numero che è dato dalla somma dei due numeri immediatamente sopra (uno a destra e l'altro a sinistra). I numeri che corrispondono ai nodi rappresentano anche i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio.

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Il termine $\binom{n}{k}$ viene detto coefficiente binomiale e si calcola nel seguente modo:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Dove con $n!$ si intende la moltiplicazione di tutti i numeri interi da n a 1. Cioè $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\text{Quindi } \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Da notare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Spieghiamo questa regola in relazione al nostro esercizio

Premettiamo il significato di permutazione di n elementi su n posti.

Che cos'è una permutazione di n elementi su n posti?

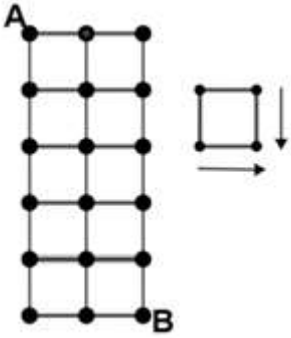
Se ho la parola sole e voglio permutarla in tutti i modi possibili avrò 24 modi:

Sole, selo, sloe, sleo, soel, seol, osle, osel, oesl, oels, oles, olse, lose, loes, leso, leos, lseo, lsoe, elos, elso, esol, eslo, eols, eosl.

Come vedi abbiamo molte parole senza senso, a volte impronunciabili, ma abbiamo disposto le 4 lettere su 4 posti in tutti i modi possibili.

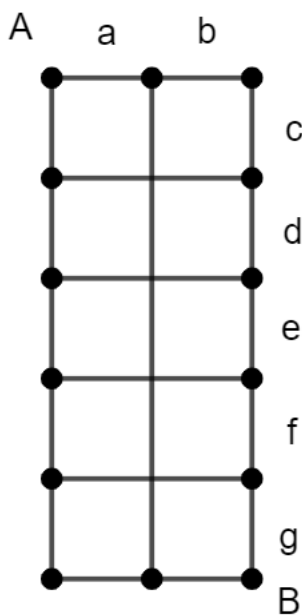
Si calcola con $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ in generale $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Esaminiamo adesso il testo del quesito:

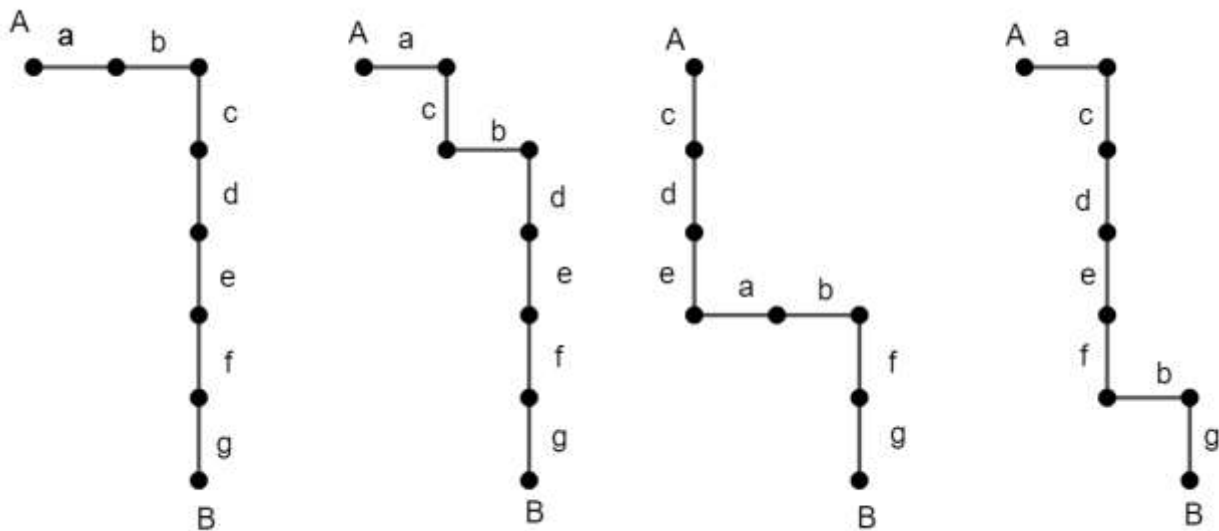
	<p>Questo grafico rappresenta la pianta di un quartiere composto da isolati con maglia quadrata. Le linee comprese tra due punti rappresentano le vie. Se i miei spostamenti lungo queste vie sono solo verso destra e verso il basso, quanti sono i percorsi possibili per andare da A a B?</p> <p><input type="checkbox"/>A) 24 <input type="checkbox"/>B) 21 <input type="checkbox"/>C) 18 <input type="checkbox"/>D) 15 <input type="checkbox"/>E) 12</p>
--	---

Cerchiamo la soluzione osservando tutti gli spostamenti possibili.

Inseriamo le lettere a, b per indicare gli spostamenti in orizzontale e le lettere c, d, e, f, g per indicare gli spostamenti in verticale.



Se vogliamo arrivare da A a B muovendoci solo come indicato dalle frecce, cioè o verso il basso o verso destra, faremo solo 7 movimenti: (a,b)+(c,d,e,f,g), cioè sempre 2 in orizzontale e 5 in verticale. Vediamo alcuni esempi:



Questi sono 4 tra i percorsi possibili.

Il primo è a,b,c,d,e,f,g

Il secondo è a,c,b,d,e,f,g

Il terzo è c,d,e,a,b,f,g

Il quarto è a,c,d,e,f,b,g

Come vedi sono le sette lettere a,b,c,d,e,f,g che cambiano posto, cioè è come scrivere e permutare una parola di 7 lettere cioè 7!

Però nota che le lettere in orizzontale sono sempre nell'ordine a,b e quelle in verticale nell'ordine c,d,e,f,g.

Quindi non avremo mai b,a,c,d,e,f,g oppure a,d,c,b, g,e,f

Quindi alcune parole non possono scriversi. Quali e quante sono?

Le lettere in orizzontale sono solo 2 e possono permutarsi in 2 modi: ab e ba cioè 2!

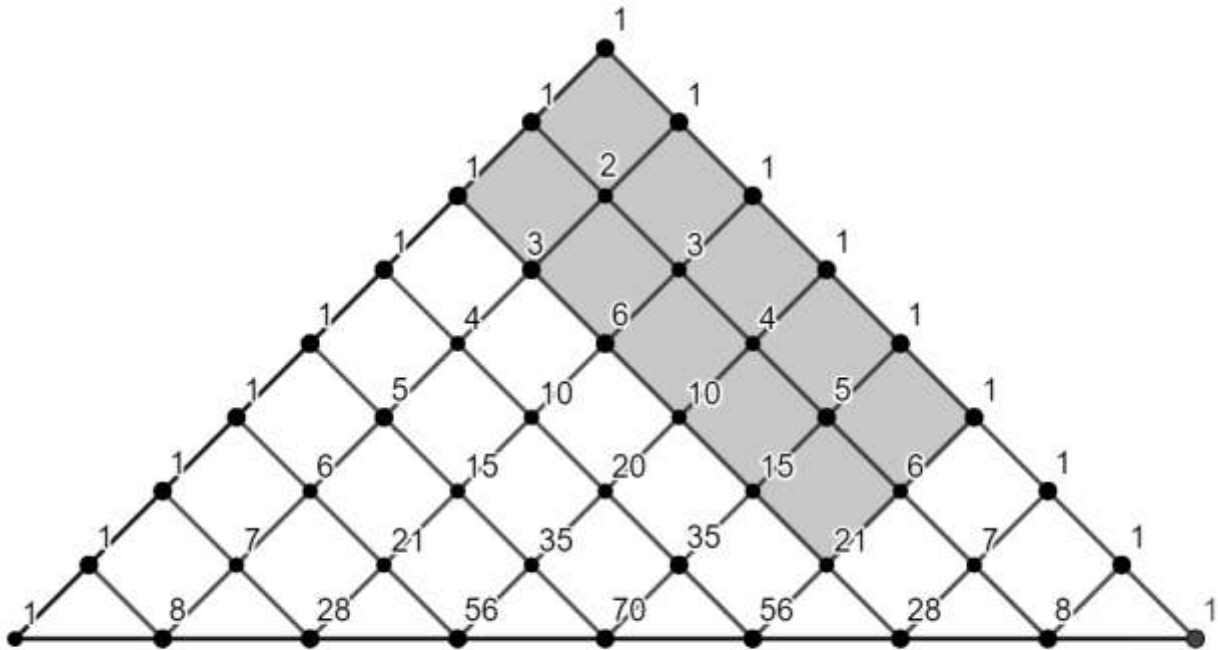
A noi ne interessa solo uno, quindi divideremo per 2!

Allo stesso modo in verticale abbiamo 5 lettere c,d,e,f,g che devono stare in quest'unico ordine. Ma le loro permutazioni sono 5! Quindi divideremo anche per 5!

$$\text{Cioè } \frac{7!}{2!5!} = \binom{7}{2} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{2*1*5*4*3*2*1} = 21$$

Prova tu a controllare disegnando tutti i 21 percorsi.

Se invece volessi utilizzare il triangolo di Pascal:



Nel nostro caso se volessi trovare il numero dei percorsi che portano da A a B basterebbe disegnare la parte del triangolo di Pascal che ci interessa (la parte in grigio e vedere il numero corrispondente all'ultimo nodo, cioè 21).

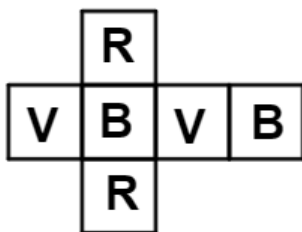
• **Quesito N°3 categorie S4 e S5**

Esaminiamo il testo del quesito:

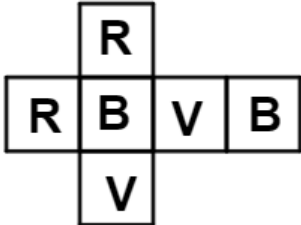
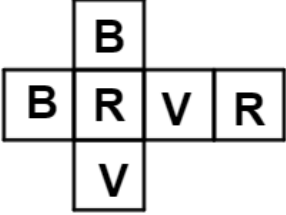
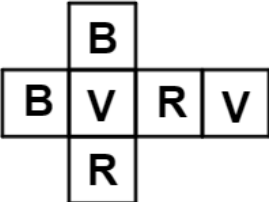
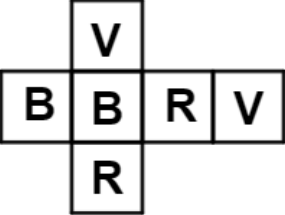
Roberta vuole regalare al fratellino Luca alcuni cubi di legno. Ma prima di ciò colora ogni faccia dei cubi con un colore, utilizzando i colori verde, bianco e rosso, in modo da ottenere tutti i possibili cubi diversi tra loro. Roberta regala alla fine solo alcuni cubi al fratellino, infatti decide di tenere per sé tutti quei cubi che hanno esattamente 2 facce verdi, 2 bianche e 2 rosse. Quanti sono i cubi che Roberta tiene per sé?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

il numero di cubi diversi tra loro è 5, esaminiamo i loro sviluppi.



Le facce opposte sono dello stesso colore

 <p>A net of a cube with faces labeled R, B, V, B, R, V. The layout is: a central row of four squares (R, B, V, B), a square (R) above the second square (B), and a square (V) below the second square (B).</p>	<p>Solamente le facce bianche sono opposte, mentre sia le facce rosse che le facce verdi hanno uno spigolo in comune</p>
 <p>A net of a cube with faces labeled B, R, V, R, B, V. The layout is: a central row of four squares (B, R, V, R), a square (B) above the second square (R), and a square (V) below the second square (R).</p>	<p>Solamente le facce rosse sono opposte, mentre sia le facce bianche che le facce verdi hanno uno spigolo in comune</p>
 <p>A net of a cube with faces labeled B, V, R, V, B, R. The layout is: a central row of four squares (B, V, R, V), a square (B) above the second square (V), and a square (R) below the second square (V).</p>	<p>Solamente le facce verdi sono opposte, mentre sia le facce bianche che le facce rosse hanno uno spigolo in comune</p>
 <p>A net of a cube with faces labeled V, B, B, R, V, R. The layout is: a central row of four squares (B, B, R, V), a square (V) above the second square (B), and a square (R) below the second square (B).</p>	<p>Non vi sono facce opposte dello stesso colore</p>

• **Quesito N°13 categoria S5 e N°6 categoria S6**

Esaminiamo il testo del quesito:

Marco vuole accantonare una somma di denaro S da spendere il primo gennaio 2024, pertanto decide di risparmiare a partire dal primo gennaio 2023 e per la durata dell'intero corso dell'anno. Marco potrà usufruire di una serie di somme versate regolarmente dalla madre solo nel corso dell'anno 2023, ma deve tener conto anche di alcune spese che dovrà affrontare nel corso dei 365 giorni e precisamente:

- Ogni primo del mese incassa 22 euro come paghetta mensile;
- Il penultimo giorno di ogni mese riscuote 11 euro per i lavori svolti a casa;
- Spende 34 euro ogni quattro mesi come quota per un corso di pianoforte online, ma per il suddetto corso riceve come supporto da parte della madre altri 15 euro che verranno versati al termine del mese successivo al quadrimestre;
- Riceve dalla madre come regalo di compleanno l'ultimo giorno del decimo mese un importo pari alla metà dei soldi sino ad allora accantonati.

Qual è la somma di cui disporrà Marco il primo gennaio 2024?

- A) 460 € B) 465 € C) 470 € D) 475 € E) 480 €

Per determinare la somma complessiva che Marco ha messo da parte al termine dell'anno 2023, bisogna valutare preliminarmente l'ammontare versato dalla madre alla fine di ottobre come regalo di compleanno, il quale a sua volta dipende dalla somma accantonata da Marco al termine del mese di ottobre. A tal proposito nella

seguito tabella vengono esaminate le corrispondenti entrate e uscite per il periodo suddetto:

	tipologia di entrata/uscita	euro	n. versamenti	Somme parziali
ENTRATE	Paghetta mensile	22.00	10	220
	Introiti da lavoro	11.00	10	110
	Integrazione pianoforte	15.00	2	30
USCITE	Spese quadrimestrali pianoforte	34.00	2	68
	Netto alla fine del mese di ottobre			292

Pertanto la somma regalata dalla madre corrisponde alla metà del netto messo da parte nei primi 10 mesi è cioè:

$$S_{compl} = \frac{292}{2} = 146 \text{ euro}$$

Conseguentemente è possibile rappresentare lo schema delle entrate e uscite per l'intero anno 2023

Regalo di compleanno													146
Integrazione pianoforte						15						15	
Introiti da lavoro	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	
Paghetta mensile	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	
	Gennaio	febbraio	marzo	aprile	maggio	giugno	luglio	agosto	settembre	ottobre	novembre	dicembre	
Spese quadrimestrali pianoforte						34						34	

In base allo schema precedente, suddividendo le entrate e le uscite per l'intero anno 2023, si ottiene la seguente tabella:

	tipologia di entrata/uscita	euro	n. versamenti	Somme parziali
ENTRATE	Paghetta mensile	22.00	12	264
	Introiti da lavoro	11.00	12	132
	Integrazione pianoforte	15.00	2	30
	Regalo compleanno	146	1	146
USCITE	Spese quadrimestrali pianoforte	34.00	3	102
	Netto alla fine del mese di dicembre			470

• Quesito N°4 categorie S4 e S5 e N°1 categoria S6

Esaminiamo il testo del quesito:

Se non è vero che tutte le torte cucinate dal presidente Lunardi fanno venire il mal di pancia, allora:

A) Ho mangiato una torta cucinata dal presidente Lunardi.

Posso stare tranquillo, sicuramente non avrò il mal di pancia.

B) Se mangio tante torte cucinate dal presidente Lunardi, è probabile che qualcuna mi faccia venire il mal di pancia.

C) Su dieci torte cucinate dal presidente Lunardi, almeno una mi farà venire il mal di pancia.

D) Non posso escludere che tutte le torte cucinate dal presidente Lunardi non fanno venire il mal di pancia.

E) Il presidente Lunardi è un ottimo cuoco.

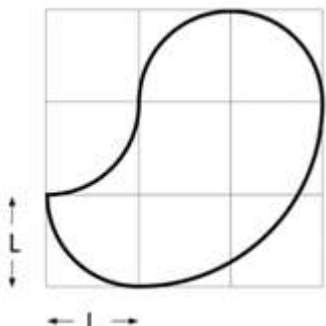
La A non può essere corretta: nessuno, infatti, mi assicura che io abbia mangiato una torta tra quelle che non fanno venire il mal di pancia (non tutte quelle cucinate da Lunardi lo fanno venire, ma magari qualcuna che lo fa venire c'è; chi lo sa).

La B non ha senso: tira in ballo il concetto di "probabile" che non rientra nella logica del quesito, così come la C: non abbiamo idee di quante siano le torte cucinate da Lunardi che fanno venire il mal di pancia.

La D è corretta. Sappiamo che alcune torte cucinate da Lunardi non fanno venire il mal di pancia. Non sappiamo nient'altro. Il fatto che alcune non lo facciano venire non implica, infatti, che altre lo facciano venire.

• Quesito N°7 categoria S6

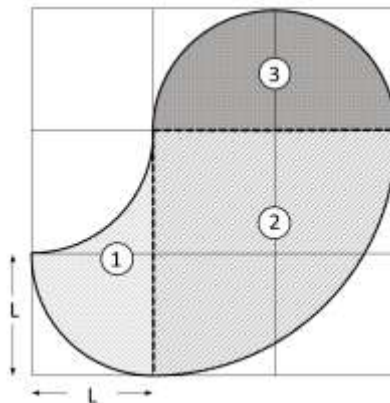
Esaminiamo il testo del quesito:



Il contorno del logo di un noto brand è stato realizzato a partire da una griglia a maglia quadrata di lato L assegnato. Sapendo che le curve rappresentate in figura sono archi di circonferenza, si richiede di determinare l'area racchiusa all'interno del contorno colorato.

A) $A_{tot} = \frac{(2\pi+1) \cdot L^2}{2}$ B) $A_{tot} = \frac{(3\pi+1) \cdot L^2}{2}$ C) $A_{tot} = \frac{(3\pi+2) \cdot L^2}{2}$
 D) $A_{tot} = \frac{(2\pi-1) \cdot L^2}{2}$ E) $A_{tot} = \frac{(3\pi-1) \cdot L^2}{2}$

Il logo può essere suddiviso in tre parti, così come mostrato in figura.



A tal proposito è facile dimostrare che:

1) l'area A_1 equivale all'area di un quadrato di lato L

2) l'area A_2 corrisponde ad un quarto dell'area di un cerchio di raggio pari a $2L$

3) l'area A_3 è pari alla metà dell'area di un cerchio di raggio L

Pertanto sommando le tre aree avremo:

$$A_{tot} = A_1 + A_2 + A_3 = L^2 + \frac{\pi \cdot (2L)^2}{4} + \frac{\pi \cdot L^2}{2}$$

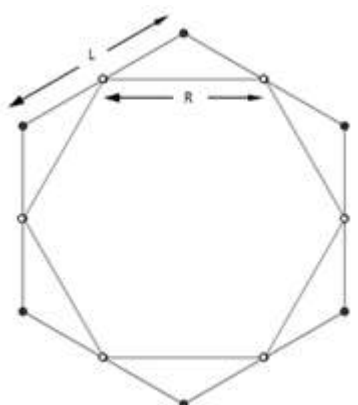
$$A_{tot} = \frac{4L^2 + 4 \cdot \pi \cdot L^2 + 2 \cdot \pi \cdot L^2}{4} = \frac{4L^2 + 6 \cdot \pi \cdot L^2}{4}$$

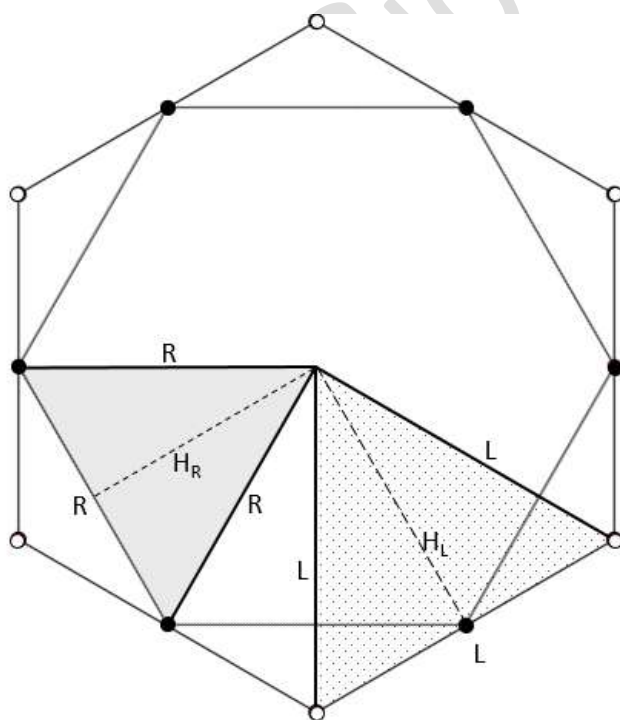
E dunque

$$A_{tot} = \frac{(3 \cdot \pi + 2) \cdot L^2}{2}$$

• Quesito N°8 categoria S6

Esaminiamo il testo del quesito:

	<p>Dato un esagono regolare di lato L, si uniscano i punti medi su ciascun lato in modo da definire un nuovo esagono regolare di lato R così come mostrato in figura. Si determini il rapporto q tra la superficie dell'esagono esterno e quello interno.</p> <p><input type="checkbox"/> A) $q = \frac{6}{5}$ <input type="checkbox"/> B) $q = \frac{4}{3}$ <input type="checkbox"/> C) $q = \frac{5}{4}$ <input type="checkbox"/> D) $q = \frac{3}{2}$ <input type="checkbox"/> E) $q = 2$</p>
--	--



Indicando con H_L e H_R rispettivamente le altezze degli esagoni di lato L e di lato R , calcoliamo le relative aree:

$$A_L = \frac{6 \cdot L \cdot H_L}{2} \quad A_R = \frac{6 \cdot R \cdot H_R}{2}$$

Dal rapporto tra le due aree si ottiene:

$$q = \frac{A_L}{A_R} = \frac{L \cdot H_L}{R \cdot H_R} \quad (1)$$

Inoltre ricordando che in un triangolo equilatero possiamo ricavare l'altezza in funzione del lato, avremo che:

$$H_L = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \quad H_R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$q = \frac{A_L}{A_r} = \frac{L^2}{R^2}$$

Infine essendo $R = H_L$ si ricava:

$$q = \frac{A_L}{A_r} = \frac{L^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L\right)^2} = \frac{4}{3}$$

AIPM Giochi Matematici